Université de Cergy-Pontoise
L2 – P – prépa-MP et prépa-PC

Année 2011-12

Examen de mécanique du solide - corrigé

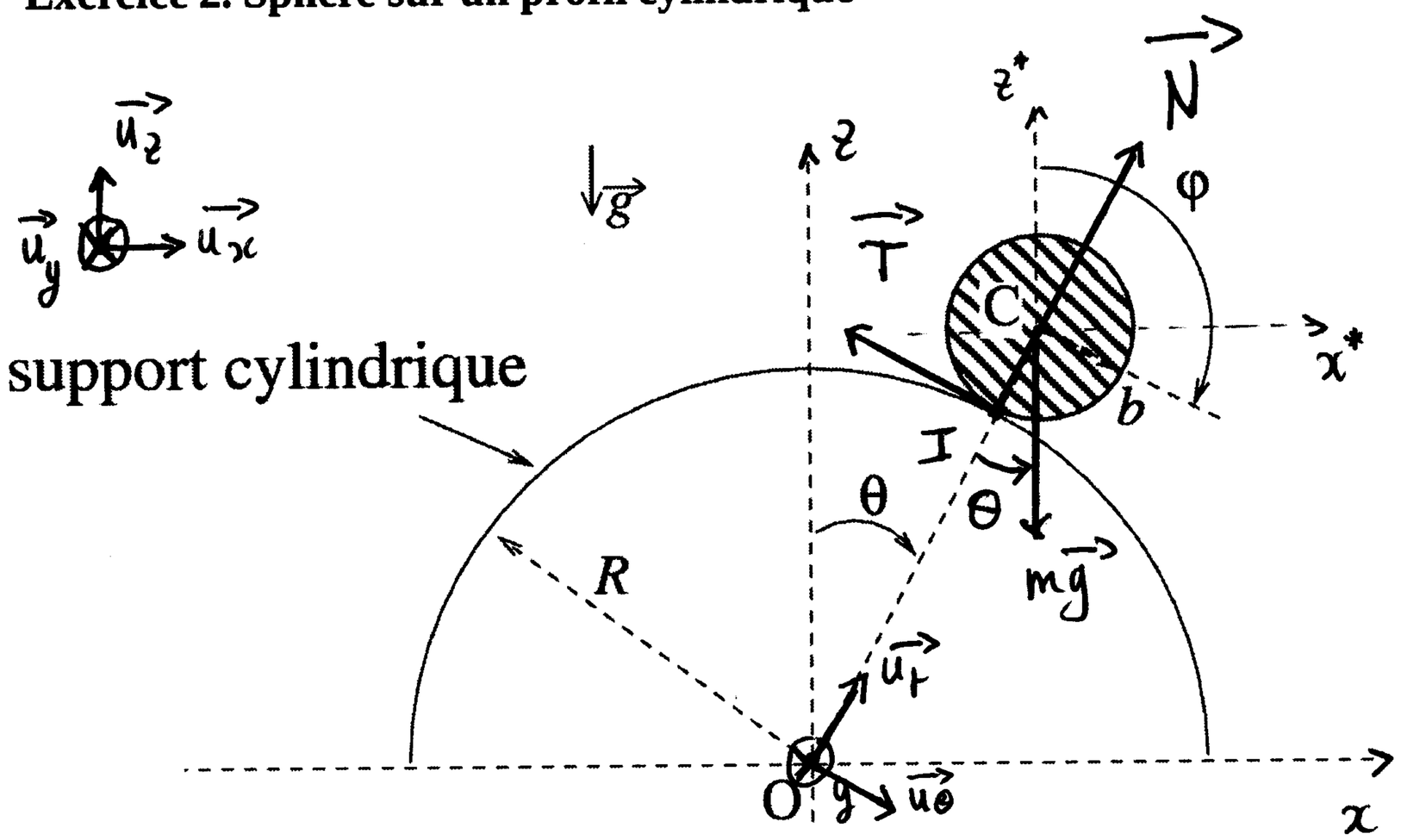
Lundi 31 octobre 2011

Exercice 1. Question de cours *: voir cours*

th Koenig: $\vec{L}_C = \vec{L}_C^* + m\,\vec{CG} \wedge \vec{V}(G)$

b) $J = \frac{1}{2} m R^2$ (démonstration voir cours)

Exercice 2. Sphère sur un profil cylindrique



Choix notation :

$\vec{N} = N\,\vec{u}_r$

$\vec{T} = -T\,\vec{u}_\theta$

$\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\,\vec{u}_y$

a) Faces sur la sphère : • $m\vec{g}$ en C

• face du cylindre sur sphère en I : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ (normale + frottement)

PFD : $m\,\vec{a}(C) = \underbrace{m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}}_{\text{dans le plan de la figure}}$ (1) $\Rightarrow$ $\vec{a}(C)$ dans le plan de la figure

donc $\vec{v}(C) = \int_0^t \vec{a}(C)\,dt' + \vec{v}_0 = 0$ ← condition initiale

et aussi dans le plan de la figure

$\Rightarrow$ le mouvement de C est plan, sur un cercle de centre O et de rayon $R+b$.

b) Dans le référentiel barycentrique de la sphère, $R^*(C, x^*, y^*, z^*)$, la sphère a un mouvement de rotation autour de l'axe $(C y^*)$ à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ donc $\vec{\Omega}^* = \dot{\varphi}\,\vec{u}_y$, or $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}^*$ (dans (R) = dans (R^*))

La sphère roule sans glisser en I donc $\vec{v}(I_1) = \vec{v}(I_2) = \vec{0}$
(I_1 et I_2 coïncident avec I à l'instant t) ↑ ∈ sphère ↑ ∈ cylindre

Varignon : $\dfrac{d\overrightarrow{CI_1}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CI_1}$ car C et $I_1 \in$ sphère

$$\vec{v}(I_1) - \vec{v}(C) = -\dot{\varphi} b \, \vec{u_y} \wedge \vec{u_r} = -\dot{\varphi} b \, \vec{u_\theta} \Rightarrow \vec{v}(C) = \dot{\varphi} b \, \vec{u_\theta}$$

or, le mvt de C est sur un cercle : $\overrightarrow{OC} = (R+b)\,\vec{u_r}$

$$\Rightarrow \vec{v}(C) = (R+b)\,\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} \quad (2)$$

$$\underline{\underline{(R+b)\,\dot{\theta} = \dot{\varphi} b}} \quad (3)$$

et $\vec{\Omega} = \dfrac{R+b}{b}\,\dot{\theta}\,\vec{u_y}$ (4)

c) P.F.D. (1) : projection suivant $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ → $\begin{cases} m(R+b)\dot{\theta}^2 = N - mg\cos\theta \quad (5) \\ m(R+b)\ddot{\theta} = -T + mg\sin\theta \quad (6) \end{cases}$

$$\vec{a}(C) = \frac{d\vec{v}(C)}{dt} \overset{(2)}{=} (R+b)\,\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - (R+b)\,\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}$$

Th du moment cinétique barycentrique par roulant à l'axe (Cy^+)

$$\frac{d\,L^*_{(Cy^+)}}{dt} = \left(\underbrace{\overrightarrow{CC}}_{=\vec{0}} \wedge m\vec{g} + \underbrace{\overrightarrow{CI} \wedge \vec{N}}_{=\vec{0} \text{ car } //} + \overrightarrow{CI} \wedge \vec{T} \right) \cdot \vec{u_y}$$

$$= +bT\,\underbrace{\vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta}}_{\vec{u_y}} \cdot \vec{u_y} = bT$$

dans (R^*) le mvt de la sphère est une rotation autour d'un axe fixe,

donc $L^*_{(Cy^+)} = I_{(Cy^+)}\,\dot{\varphi} = \frac{2}{5} m b^2 \dot{\varphi} = \frac{2}{5} m b (R+b)\dot{\theta}$

Ainsi $\frac{2}{5} m b (R+b)\ddot{\theta} = bT$

avec (6) il vient $\frac{2}{5} m (R+b)\ddot{\theta} = -m(R+b)\ddot{\theta} - mg\sin\theta$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{5}(R+b)\ddot{\theta} = g\sin\theta \quad (8)$$

L'equation différentielle (8) peut s'intégrer en la multipliant par $\dot\theta$:

$$\frac{7}{5}(R+b)\,\ddot\theta\,\dot\theta = g\sin\theta\,\dot\theta$$

$$\frac{7}{5}(R+b)\int_0^t \ddot\theta\,\dot\theta\,dt' = g\int_0^t \sin\theta\,\dot\theta\,dt'$$

$$\frac{7}{5}(R+b)\left(\frac{\dot\theta(t)^2}{2} - 0\right) = g\left(-\cos\theta(t) + 1\right)$$

ainsi $$\dot\theta(t)^2 = \frac{10}{7}\frac{g}{(R+b)}\left(1-\cos\theta(t)\right) \qquad (9)$$

d) Frottement $T = \|\vec T\|$ et réaction normale $N = \|\vec N\|$

d'après (5) et (6)

$$\begin{cases} N = m(R+b)\dot\theta^2 + mg\cos\theta \\ T = -m(R+b)\ddot\theta + mg\sin\theta \end{cases}$$

avec l'expression de $\ddot\theta$ (éq. (8)) et de $\dot\theta$ (éq. (9)) on a :

$$N = \frac{10}{7}mg(1-\cos\theta) + mg\cos\theta = \underline{\underline{mg\left(\frac{10}{7} - \frac{3}{7}\cos\theta\right)}}$$

$$T = -\frac{5}{7}mg\sin\theta + mg\sin\theta = \underline{\underline{mg\ \frac{2}{7}\sin\theta}}$$

e) La tige se met à glisser lorsque $T = \mu N$ c.à.d pour θ_1 tel que :

soit $$\frac{2}{7}\sin\theta_0 = \mu\left(\frac{10}{7} - \frac{3}{7}\cos\theta_0\right)$$

soit $$2\sin\theta_0 = f(17\cos\theta_0 - 10)$$ soit $$4\underbrace{\sin^2\theta_0}_{1-\cos^2\theta_0} = f^2(17\cos\theta_0 - 10)^2$$

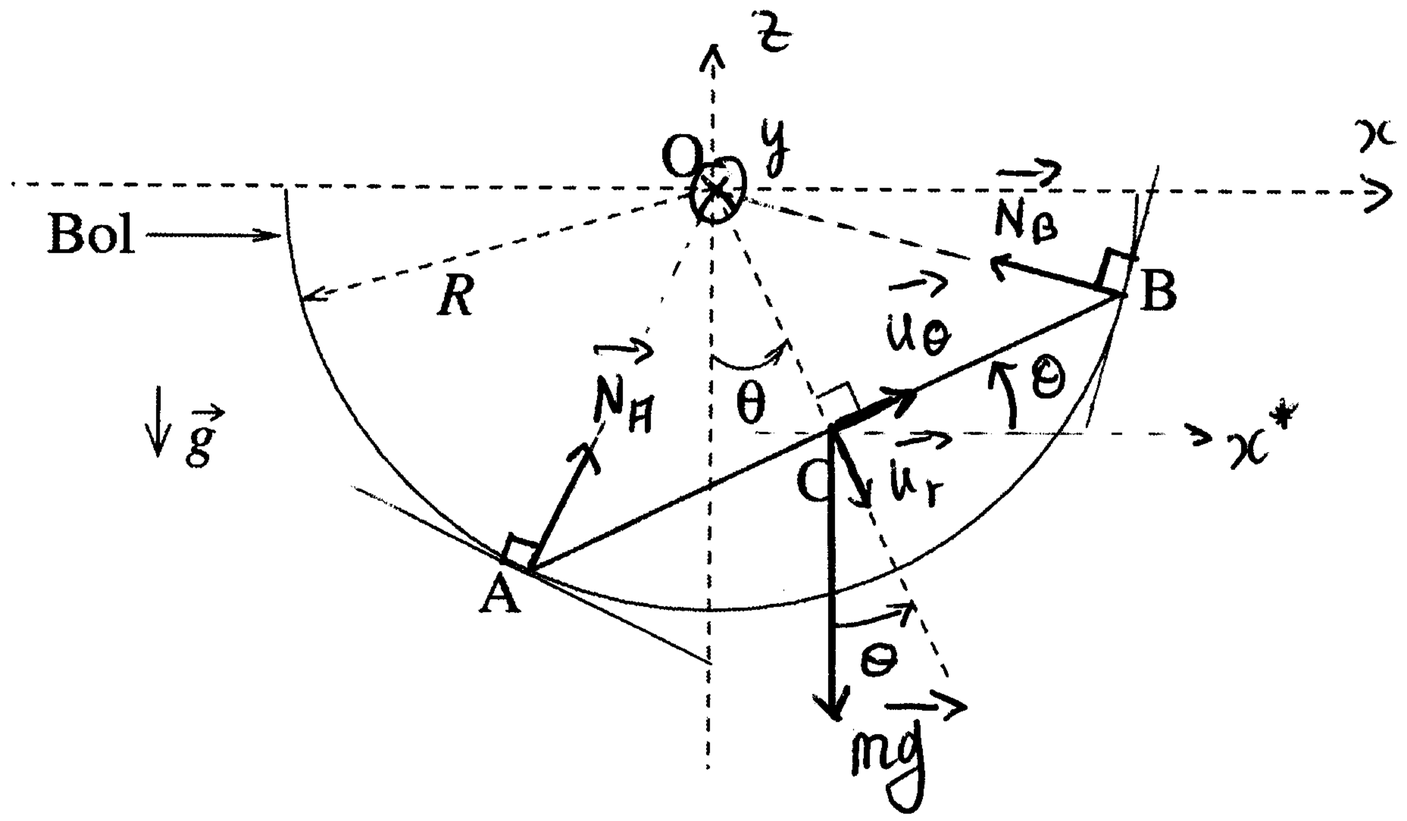
on obtient : $(f^2 17^2 + 4)\cos^2\theta_0 - 340 f\cos\theta_0 + f^2 100 - 4 = 0$

ainsi $$\theta_0 = \frac{340f \pm \sqrt{340^2 f^2 - 4(f^2 100 - 4)(f^2 17^2 + 4)}}{2f^2 17^2 + 4}$$

on garde la plus petite valeur de θ_0

Rmq pour $\theta = \theta_0$ on peut vérifier que $N > 0 \Rightarrow$ la sphère n'a pas décollée.

Exercice 3. Oscillation d'une barre dans un bol



pas de frottement en A et B

$\vec{N_A}$ et $\vec{N_B}$ ⊥ surface du bol

C : centre de gravité de la barre

Relation géométrique triangle rectangle (OCB) : $OB^2 = OC^2 + CB^2$

$R^2 = OC^2 + \ell^2$

donc $OC = c^{te} = \sqrt{R^2 - \ell^2} = b$

Le mouvement de C est sur un cercle de rayon $OC = b$, de centre O

$\vec{v}(C) = \frac{d\vec{OC}}{dt} = b\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ en coordonnées polaires.

Energie cinétique de la barre (AB) : Th de Koënig : $E_c = \frac{1}{2} m V(C)^2 + E_c^*$

avec l'énergie cinétique barycentrique $E_c^* = \frac{1}{2} J \Omega^2$ car dans (R^*) la barre tourne autour de l'axe (Cy) à la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$.

donc $E_c = \frac{1}{2} m b^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\theta}^2$ dans $R(O,x,y,z)$

car $J = \frac{1}{12} m (2\ell)^2 = \frac{1}{3} m \ell^2$

soit $E_c = \frac{1}{2} m \left(R^2 - \frac{2}{3}\ell^2\right) \dot{\theta}^2$

dans (R) Galiléen : Th de la puissance cinétique $\frac{dE_c}{dt} = \sum$ Puissance des forces

forces sur la barre : • $\vec{N_A}$ point d'application A et $\vec{v}(A) \perp \vec{N_A}$ ⇒ $\vec{N_A}$ ne travaille pas

• $\vec{N_B}$ " B $\vec{v}(B) \perp \vec{N_B}$ ⇒ $\vec{N_B}$ "

• $m\vec{g}$ " C : puissance $\mathcal{P}(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot \vec{v}(C)$

$= mg\, v(C) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

$= -mg\, v(C) \sin\theta$

ainsi $\frac{dE_c}{dt} = -mg\, v(G) \sin\theta$

soit $\frac{1}{2} m \left(R^2 - \frac{2}{3}\ell^2\right) 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mg\sqrt{R^2-\ell^2}\,\dot{\theta}\sin\theta$

$$\ddot{\theta} = -\,g\,\frac{\sqrt{R^2-\ell^2}}{R^2-\frac{2}{3}\ell^2}\,\sin\theta$$

l'eq. différentielle du mouvement de la barre.

soit la constante $k = \sqrt{\frac{g\sqrt{R^2-\ell^2}}{R^2-\frac{2}{3}\ell^2}} > 0$: $\ddot{\theta} = -k^2 \sin\theta$

dans la limite des petits angles : $\ddot{\theta} \simeq -k^2\theta$ (car $\sin\theta \simeq \theta$)

Donc les solutions sont $\theta(t) = A\cos(kt+\varphi)$ avec A et φ 2 constantes

la période de $\theta(t)$ est $T = \frac{2\pi}{k}$

soit $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2-\frac{2}{3}\ell^2}{g\sqrt{R^2-\ell^2}}}$